数理解析研究所講究録
909巻 1995年 136-146

$U(2,2)$ の留数スペクトル

今野拓也 * (Takuya Konno)

March 13, 1995

Contents

1 問題 1

2 結果 2

3 証明の概説 3
- 3.1 L^2- 内積公式の分解 3
  - 3.1.1 Pseudo-Eisenstein 級数の間の L^2- 内積 4
  - 3.1.2 $U(2,2)$ についての記号の準備 4
  - 3.1.3 $A(\phi,\phi')$ の極 5
  - 3.1.4 L^2- 内積の分解 6
- 3.2 留数スペクトルの決定 9

1 問題

G を代数体 k 上の簡約代数群とする. 簡単のため G の中心は k 上 anisotropic であるとする. k のアデール環を $\mathbb{A}$ と書くとき, G の $\mathbb{A}$- 有理点の群 $G(\mathbb{A})$ は局所コンパクト位相群で k- 有理点の群 $G(k)$ を covolume が有限の離散部分群として含む. 商空間 $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分関数の空間を $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ と書き, L^2- **保型形式**の空間と呼ぶ. $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現 R;

$$[R(g)\phi](x) := \phi(xg), \quad (\phi \in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A})),\, g \in G(\mathbb{A}))$$

の「既約分解」が我々の興味の対象である.

この表現は $G(\mathbb{A})$- 不変な2つの閉部分空間 $L^2_{disc}(G)$ と $L^2_{cont}(G)$ の直和に分解する. ここで $L^2_{disc}(G)$ は既約表現の直和に分解し, $L^2_{cont}(G)$ は既約表現の「連続和」になっている. 従って上の「既約分解」とは正確には $L^2_{disc}(G)$ の既約因子を分類することである.

*東京大学数理科学研究科 (博士3年) 〒113 文京区本郷 7-3-1
E-mail address: takuya@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp

P を G の k 上定義された放物型部分群とし U をその unipotent radical とする. L^2-保型形式 ϕ の P に沿っての定数項を

$$\phi_P(g) := \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\,du$$

と定義する. このとき L^2-**尖点形式**の空間 $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ は, $\phi \in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ であってその定数項 ϕ_P が全ての k-放物型部分群 P に対してほとんど至る所で消えているものたちで生成される. これは明らかに $G(\mathbb{A})$-不変な閉部分空間であって, また $L^2_{disc}(G)$ に含まれる.

古典的な保型形式の Fourier 展開の保型表現版である Whittaker モデルは $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の既約分解の有効な道具である. 実際 $G = GL(n)$ の時には Jacquet, Langlands, Piatetskii-Shapiro それに Shalika により, Whittaker モデルを使った $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の満足のいく既約分解が得られている. しかし G が $GL(n)$ や $SL(n)$ 以外の時には Whittaker モデルで全ての $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の既約因子を掴まえることはできない. 従って $G = GL(n)$, $SL(2)$ そして $U(2,1)$ 以外の場合の $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の既約分解は全く未解決である.

しかし我々の現在の知識で解決可能な問題が 1 つある. それは $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の $L^2_{disc}(G)$ での直交補空間の既約分解, つまり**留数スペクトル**の決定をランク 2 の古典群に対して行うことである. 実際,

(1) Langlands ([La]) により留数スペクトルはある種の Eisenstein 級数のそれらの極での留数たちで張られることが知られている.

(2) 一方 Shahidi ([Sh1]) によれば, ランク 2 の群に対してはこれらの Eisenstein 級数の解析的挙動はある種の保型 L-関数のそれで支配される.

(3) 従ってもしこの保型 L-関数たちの極を決定できれば, (原則的には) 留数スペクトルの決定は G の Levi 部分群 M の尖点形式の空間 $L^2_0(M(k)Z_M(\mathbb{A})\backslash M(\mathbb{A}))$ の既約分解に帰着される.

ここで Z_M は M の中心である.

2 結果

今回はこの留数スペクトルの決定を二次拡大 k'/k に対応するランク 2 の quasi-split なユニタリ群 $G = U(2,2)_{k'/k}$ に対して実行した. この場合には上の (2) の L-関数としては Hecke L-関数, 浅井-織田の L-関数それに $U(1,1)_{k'/k}$ の標準 L-関数が現れる. これらの極はその積分表示を考えることにより決定可能である. また (3) の Levi 部分群としては $M_0 := \mathrm{Res}_{k'/k}GL(1)^{\oplus 2}$, $M_1 := \mathrm{Res}_{k'/k}GL(2)$ それに $M_2 := \mathrm{Res}_{k'/k}GL(1) \times U(1,1)_{k'/k}$ を考えればよく, これに対する $L^2_0(M(k)Z_M(\mathbb{A})\backslash M(\mathbb{A}))$ の既約分解は [J-L] や [L-L] によって知られている. 我々の主結果は次の通りである.

定理 2.1 ($U(2,2)$ **の留数スペクトル**) $G = U(2,2)_{k'/k}$ の留数スペクトルは次の既約表現たちからなる. 各々の重複度は *1* である.

(1) 1 次元表現 $\chi \circ \det$ たち. χ は $U(1,k)\backslash U(1,\mathbb{A})$ の指標を走る.

(2) 1次のユニタリ群 $U(V,\mathbb{A})$ の単位表現からの θ-lifts $R(V,\chi)$ たち. 但し $(V,(\ ,\ )_V)$ は k'/k 上の1次元 Hermite 形式付き空間を, χ は $k'^{\times}\backslash\mathbb{A}_{k'}^{\times}$ の指標で $\chi|_{\mathbb{A}^{\times}}=\eta_{k'/k}$ であるものを走る. $\eta_{k'/k}$ は k'/k に類体論によって対応する2次指標である.

(3) 2次のユニタリ群 $U(1,1)_{k'/k}(\mathbb{A})$ の非自明な1次元表現 ξ からの θ-lifts $R(V,\chi)_{\xi}$ たち. ここで χ は $k'^{\times}\backslash\mathbb{A}_{k'}^{\times}$ の指標で $\chi|_{\mathbb{A}^{\times}}$ が自明なものである.

(4) 大局的な誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[\mathfrak{S}(P_1)\otimes \mathbf{1}_{U_1(\mathbb{A})}]$ の *"global Langlands' quotient"*. ただし P_1 は上の M_1 を *Levi* 成分に持つ放物型部分群であり, $\mathfrak{S}(P_1)$ は $M_1(\mathbb{A})$ の尖点的な既約保型表現で

 (a) その中心指標が $|\ |_{\mathbb{A}}^2$ で,

 (b) $M_1\simeq \mathrm{Res}_{k'/k}GL(2)$ の部分群 $GL(2)_k$ を H と書くとき, ある $\mathfrak{S}(P_1)$ の元 f に対して

$$\int_{H(k)Z(H,\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} f(h)|\det(h)|_{\mathbb{A}}^{-1}\,dh\neq 0.$$

 が成り立つものである.

(5) 大局的な誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k})\otimes \mathbf{1}_{U_1(\mathbb{A})}]$ 及び $\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[\mathfrak{S}(P_2,1)\otimes \mathbf{1}_{U_1(\mathbb{A})}]$ の *"global Langlands' quotient"* たち. ただし P_2 は上の M_2 を *Levi* 成分に持つ放物型部分群であり, $\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k})$ は $M_2(\mathbb{A})$ の尖点的な既約保型表現で $\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k})=\chi\otimes\tau$ と書くとき

 (a) $\chi|_{\mathbb{A}^{\times}}=|\ |_{\mathbb{A}}^2\eta_{k'/k}$,

 (b) τ は $U(1,\mathbb{A})$ からの *Weil* 表現 $\omega_{\chi^{-1}|\ |_{\mathbb{A}_{k'}},\psi}$ での $U(1,1)_{k'/k}(\mathbb{A})$ への θ-*lift*.

 であるもの. また $\mathfrak{S}(P_2,1)$ は $M_2(\mathbb{A})$ の尖点的な既約保型表現でやはり $\mathfrak{S}(P_2,1)=\chi\otimes\tau$ と書くとき, $\chi|_{\mathbb{A}^{\times}}=|\ |_{\mathbb{A}}$ であるものである.

注意 2.2 $G=Sp(2)$ の時の類似の結果は H. Kim と著者自身によって独立に得られている ([Ki], [Ko2]). もう少し詳しく言うと, 筆者の結果 [Ko2] は基礎体が総実であることを仮定している. 一方 [Ki] ではその仮定がない代わりに留数スペクトルの重複度が1であることがわからない. しかし両者の情報をあわせれば定理 2.1 の $G=Sp(2)$ 版が得られる.

3 証明の概説

3.1 L^2- 内積公式の分解

3.1.1 Pseudo-Eisenstein 級数の間の L^2- 内積

証明は $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ での $L_0^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の直交補空間 $L^2_{Eis}(G)$ の L^2- 内積の詳細な分解から始まる. P と U を G の k- 放物型部分群とその unipotent radical とし, P の k 上の Levi 成分 M を固定する. $M(\mathbb{A})$ の2つの既約尖点的な保型表現 π と τ が同値とは, π をある principal quasi-character によってひねったものが τ に同型なこととする. 既約尖点的な保型表現の同値類 $\mathfrak{P}$ には affine 複素多様体の構造が入る. 各 $\mathfrak{P}$ の上には $G(\mathbb{A})$ の表現のベクトル束でその $\pi \in \mathfrak{P}$ 上のファイバーが $\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[\pi \otimes \mathbf{1}_{U(\mathbb{A})}]$ であるものがある. このベクトル束の Paley-Wiener な切断 ϕ に対して **Eisenstein 級数** $E(\phi,\pi)(g)$ を

$$E(\phi,\pi)(g) := \sum_{\gamma\in P(k)\backslash G(k)} \phi(\pi)(\gamma g), \quad (\pi\in\mathfrak{P},\ g\in G(\mathbb{A}))$$

と定義する. これは π の実部と呼ばれる principal quasi-character $\mathrm{Re}\pi$ が P に関して十分正な $\mathfrak{P}$ の開領域で絶対収束し, $\mathfrak{P}$ 全体に有理的に延びる. この Eisenstein 級数の空間から $L^2_{Eis}(G)$ への intertwining 作用素が十分正な $\lambda_0 \in \mathrm{Re}\mathfrak{P}$ での Fourier 変換

$$\theta_\phi(g) := \int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=\lambda_0} E(\phi,\pi)(g)\,d\pi \quad (\textbf{pseudo-Eisenstein 級数})$$

によって与えられる. しかも Plancherel の公式により θ_ϕ と $\theta_{\phi'}$ の間の L^2- 内積は

$$\langle\theta_\phi,\,\theta_{\phi'}\rangle_{L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))} = \int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=\lambda_0} A(\phi,\phi')(\pi)\,d\pi, \tag{3.1}$$

$$\text{但し}\quad A(\phi,\phi')(\pi) := \int_{U(\mathbb{A})M(k)\backslash G(\mathbb{A})} E(\phi,\pi)(g)\overline{E(\phi',\bar{\tilde{\pi}})(g)}\,dg$$

に等しい. ここで $\bar{\pi}$ は π の複素共役で $\tilde{\pi}$ は π の反傾表現である.

3.1.2 $U(2,2)$ についての記号の準備

以下, 考察の対象を $G = U(2,2)_{k'/k}$ の場合に限定する. k'/k を数体の二次拡大とし, $\mathrm{Gal}(k'/k)$ の生成元を σ と書く. $GL(4,k')$ への σ の作用から定まる $\widetilde{G} := \mathrm{Res}_{k'/k}GL(4)$ 上の k- 自己同型を $\tilde{\sigma}$ と書こう. $\widetilde{G}$ の k- 自己同型 θ_2 を

$$\theta_2 : \widetilde{G} \ni g \longrightarrow \mathrm{Int}J_2({}^tg^{-1}) \in \widetilde{G}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}$$

と定義するとき, $G = U(2,2)_{k'/k}$ は $\widetilde{G}$ の $\tilde{\sigma}\circ\theta_2$ の固定点で定義される k- 部分群である.

G の k-Borel 部分群 P_0 とそれに含まれる Cartan 部分群 M_0 を

$$P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & * & 0 \\ & & * & * \end{array} \right) \in G_{k'} \right\},$$

$$M_0 = \left\{ d(x_1,x_2) := \left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & x_2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & x_1^{-1} & 0 \\ & & 0 & x_2^{-1} \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in \mathrm{Res}_{k'/k}\mathbb{G}_m \\ (i=1,2) \end{array} \right\}$$

と固定し, P_0 の unipotent radical を U_0 と書く. M_0 の k-split component は $A_0 := \{d(x_1,x_2)\,;\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{G}_{m,k}\}$ となる. P_0 に関して positive な A_0 の roots を

$$R^+(P_0,A_0) = \{\alpha_1 := e_1 - e_2,\ \alpha_2 := 2e_2,\ \beta_1 := e_1 + e_2,\ \beta_2 := 2e_1\}$$

と名付ければ, $\Delta(P_0,A_0) := \{\alpha_1,\alpha_2\}$ が simple roots の集合である.

G の放物型部分群としては上述の P_0 を含むようなもの (**標準放物型部分群**) を考えれば十分である. このような放物型部分群 P は M_0 を含む Levi 成分 M をただ一つ持ち, A の $M \cap P_0$ での simple roots の集合 $\Delta(P_0 \cap M, A_0)$ は $\Delta(P_0,A_0)$ の部分集合である. 従って今の場合, G の標準放物型真部分群としては P_0 以外に $\Delta(P_0 \cap M_i, A_0) = \{\alpha_i\}$ となる $P_i = M_iU_i$ $(i = 1,2)$ がある. P_1 は Siegel 放物型部分群と呼ばれ $M_1 \simeq \mathrm{Res}_{k'/k}GL(2)$ であり, P_2 は (時に) Jacobi 放物型部分群と呼ばれ $M_2 \simeq \mathrm{Res}_{k'/k}\mathbb{G}_m \times U(1,1)_{k'/k}$ である. 標準放物型部分群 M の中心の k-split 成分を A_M と書き, その実 Lie 環を $\mathfrak{a}_M$ と書こう. このとき $M(\mathbb{A})$ の既約尖点的表現の同値類 $\mathfrak{P}$ の実部の集合は $\mathfrak{a}_M$ と同一視できる.

3.1.3 $A(\phi,\phi')$ の極

L^2- 内積の分解を得るには (3.1) の積分軸 $\{\mathrm{Re}\pi = \lambda_0\}$ を ($\tilde{\bar{\pi}} = \pi$ となるように) "虚軸" $\{\mathrm{Re}\pi = 0\}$ まで移動する. しかしその際にいくつかの $A(\phi,\phi')(\pi)$ の極 $\mathfrak{S}$ たちをまたぐことになる. それらの極を記述しよう.

まず [Sh1] によれば $A(\phi,\phi')(\pi)$ の解析的挙動は次の保型 L- 関数のそれに一致する.

(1) $P = P_0$ の時. $M_0(\mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}_{k'}^{\oplus 2}$ の既約保型表現を $\pi = \mu_1 \otimes \mu_2$ と書くとき (μ_i は $\mathbb{A}_{k'}^\times/k'^\times$ の quasi-character) Hecke L- 関数

$$L_{k'}(0,\mu_1\mu_2^{-1}),\quad L_{k'}(0,\mu_1\sigma(\mu_2)),\quad L_k(0,\mu_1),\quad L_k(0,\mu_2)$$

たち.

(2) $P = P_1$ の時. $M_1(\mathbb{A}) \simeq GL(2,\mathbb{A}_{k'})$ の既約尖点的保型表現を π と書くとき, π の浅井 - 織田 L- 関数 (cf. [H-L-R])

$$L_{\mathrm{Asai}}(0,\pi).$$

(3) $P = P_2$ の時. $M_2(\mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}_{k'}^\times \times U(1,1)_{k'/k}(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現を $\chi \otimes \tau$ (χ は $\mathbb{A}_{k'}^\times/k'^\times$ の quasi-character, τ は $U(1,1)_{k'/k}(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現) と書くとき, τ の (χ-twisted) standard L- 関数 (cf. [Ko1] Appendix B, [G-PS])

$$L_{st}(0,\chi\otimes\tau).$$

これらの保型 L- 関数の極は, よく知られた L- 関数を積分表示する方法により計算できる:

命題 3.1 ([Ko1] Lemma 3.2, Proposition A.2 and Theorem B.24) *(1)* $P = P_0$ の時. 上の *Hecke* L-関数たちの (*positive chamber* 内の) 極は

$$\mathfrak{S}_1 := \{\pi \in \mathfrak{P}\,;\, \mu_1\mu_2^{-1} = |\ |_{\mathbb{A}_{k'}}\},\quad \mathfrak{S}_2 := \{\pi \in \mathfrak{P}\,;\, \mu_2|_{\mathbb{A}^\times} = |\ |_{\mathbb{A}}\}$$
$$\mathfrak{S}_3 := \{\pi \in \mathfrak{P}\,;\, \mu_1\sigma(\mu_2) = |\ |_{\mathbb{A}_{k'}}\},\quad \mathfrak{S}_4 := \{\pi \in \mathfrak{P}\,;\, \mu_1|_{\mathbb{A}^\times} = |\ |_{\mathbb{A}}\}$$

で与えられる.
(2) $P = P_1$ の時. 浅井-織田 L-関数の (*positive chamber* 内の) 極は定理 2.1 の *(4)* の $\mathfrak{S}(P_1)$.
(3) $P = P_2$ の時. $L_{st}(0, \chi \otimes \tau)$ の (*positive chamber* 内の) 極は定理 2.1 の *(5)* の $\mathfrak{S}(P_2, \eta_{k'/k})$ 及び $\mathfrak{S}(P_2, 1)$.

特に $P = P_0$ の時を見てみると pole の実部は下の Figure 1 のようになっている.

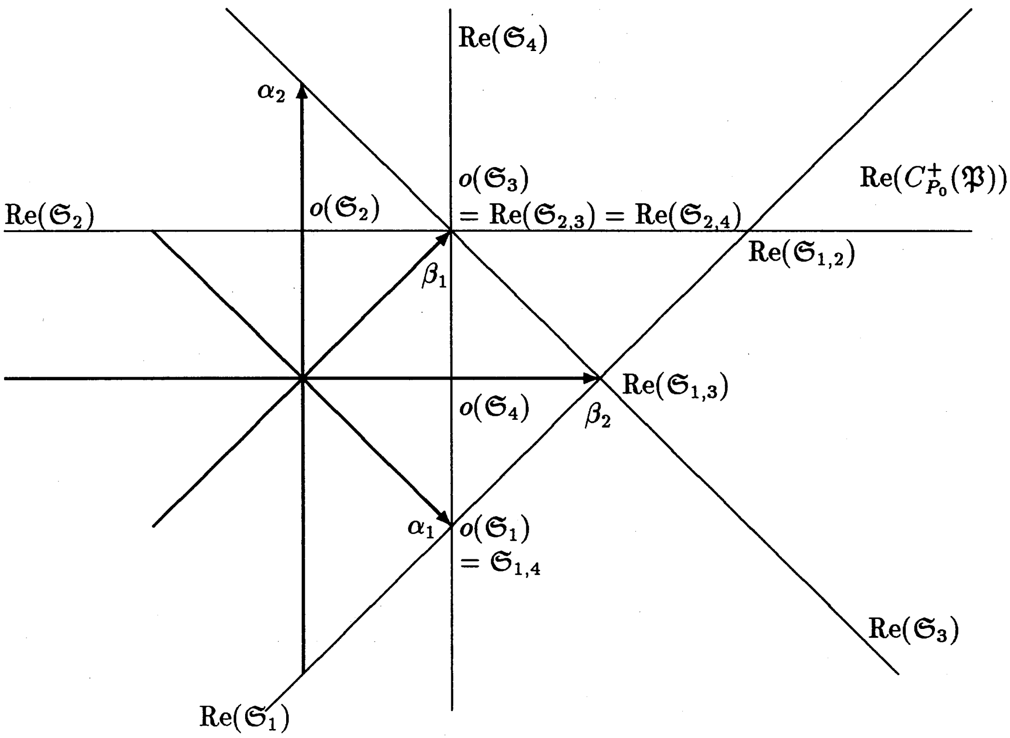

Figure 1: $\mathrm{Re}(\mathfrak{S})$ ($\mathfrak{S} \in S^{+}_{(M_0,\mathfrak{P})}$).

3.1.4 L^2-内積の分解

3.1.3 で述べたように L^2-内積の分解をするには, (3.1) の積分軸をユニタリ軸まで移動する. 移動の道 Γ ($\in \mathfrak{a}_M$) は $P = P_1, P_2$ の時には選択の余地がないが, $P = P_0$ の時には Figure 2 のようにとる必要がある.

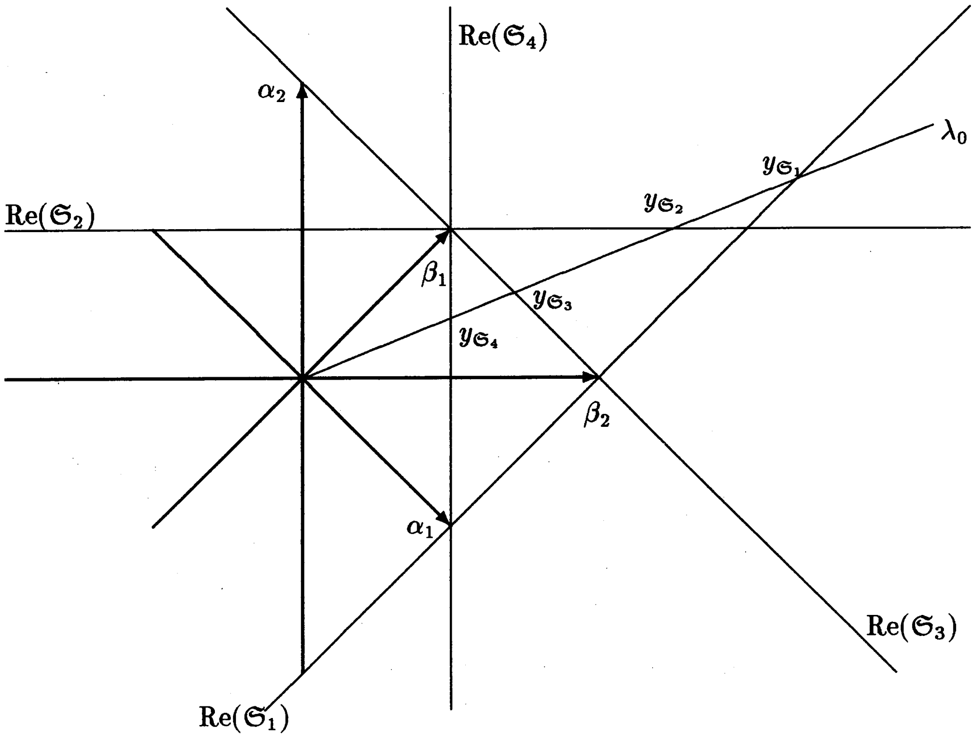

Figure 2: 移動の道 Γ.

さて $P = P_1, P_2$ の時は簡単なので $P = P_0$ の時に内積を分解する. まず Γ に沿って積分軸を移動し $A(\phi, \phi')(\pi)$ がその極 $\mathfrak{S}$ をまたぐ際に留数定理を適用することにより,

$$
\begin{aligned}
(3.2) \qquad \langle \theta_\phi,\ \theta_{\phi'} \rangle_{L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))} &= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=0} A(\phi,\phi')(\pi)\, d\pi \\
&+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\pi\in\mathfrak{S}_1,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_1}} \mathrm{Res}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_1} A(\phi,\phi')(\pi)\, d_{\mathfrak{S}_1}\pi \\
&+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\pi\in\mathfrak{S}_2,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_2}} \mathrm{Res}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_2} A(\phi,\phi')(\pi)\, d_{\mathfrak{S}_2}\pi \\
&+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\pi\in\mathfrak{S}_3,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_3}} \mathrm{Res}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_3} A(\phi,\phi')(\pi)\, d_{\mathfrak{S}_3}\pi \\
&+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\pi\in\mathfrak{S}_4,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_4}} \mathrm{Res}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_4} A(\phi,\phi')(\pi)\, d_{\mathfrak{S}_4}\pi
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')$ は $A(\phi,\phi')$ の $\mathfrak{S}$ に沿っての留数である.

次に $\mathfrak{P}$, $A(\phi,\phi')$ をそれぞれ $\mathfrak{S}$, $\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)$ で置き換えて積分軸 $\{\pi\in\mathfrak{S};\,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}}\}$ を $\mathfrak{S}$ のユニタリ軸 $\{\pi\in\mathfrak{S};\,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S})\}$ (cf. Figures 1, 2) まで移動すれば, 各 $\mathfrak{S}$ についての項は

$$(3.3)\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_1,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_1}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_1}\pi$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_1,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_1)} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_1}\pi$$
$$+\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{1,2}}^{\mathfrak{S}_1}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\mathfrak{S}_{1,2})+\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{1,3}}^{\mathfrak{S}_1}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\mathfrak{S}_{1,3}).$$

(3.4)
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_2,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_2}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_2}\pi$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_2,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_2)} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_2}\pi+\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{2,3}}^{\mathfrak{S}_2}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)$$
$$+\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{2,4}}^{\mathfrak{S}_2}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)$$

(3.5)
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_3,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_3}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_3}\pi$$
$$=\lim_{z(\mathfrak{S}_3)\to o(\mathfrak{S}_3)}\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_3,\mathrm{Re}\pi=z(\mathfrak{S}_3)}\left[\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)+\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(w_1\pi)\right]d_{\mathfrak{S}_3}\pi$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{2,3}}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi).$$

$$(3.6)\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_4,\mathrm{Re}\pi=y_{\mathfrak{S}_4}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_4}\pi$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_4,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_4)} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_4}\pi.$$

となる (cf. Figure 1, 2). これらの右辺の各項を詳しく計算し, それらの和をとることで次を得る.

定理 3.2 (L^2-内積の分解) θ_ϕ と $\theta_{\phi'}$ の間の L^2-内積は次で与えられる.
(1) $P=P_0$ のとき.

$$\langle\theta_\phi,\theta_{\phi'}\rangle_{L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))}=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=0} A(\phi,\phi')(\pi)\,d\pi$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_1,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_1)} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_1}\pi$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_2,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_2)} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_2}\pi$$
$$+\lim_{z(\mathfrak{S}_3)\to o(\mathfrak{S}_3)}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_3,\mathrm{Re}\pi=z(\mathfrak{S}_3)}\frac{1}{2}\sum_{w=1,w_1}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{P}} A(\phi,\phi')(w\pi)\,d_{\mathfrak{S}_3}\pi$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{S}_4,\mathrm{Re}\pi=o(\mathfrak{S}_4)}\mathrm{Res}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_4}A(\phi,\phi')(\pi)\,d_{\mathfrak{S}_4}\pi$$

(3.7)
$$+2c_kc_{k'}\langle N(w_2,w_1w_2w_1\mathfrak{S}_{1,2})M(w_1w_2,w_1\mathfrak{S}_{1,2})N(w_1,\mathfrak{S}_{1,2})\phi(\mathfrak{S}_{1,2}),\ \phi'(-w_-\overline{\mathfrak{S}}_{1,2})\rangle$$

(3.8)
$$+4c_{k'}^2\langle N(w_1,w_2w_1\mathfrak{S}_{1,3})M(w_2,w_1\mathfrak{S}_{1,3})N(w_1,\mathfrak{S}_{1,3})\phi(\mathfrak{S}_{1,3}),\ \phi'(-w_-\overline{\mathfrak{S}}_{1,3})\rangle$$

(3.9)
$$\begin{aligned}+4c_{k'}^2\Big[&\langle N(w_2,w_1w_2\mathfrak{S}_{2,4})M(w_1,w_2\mathfrak{S}_{2,4})N(w_2,\mathfrak{S}_{2,4})\phi(\mathfrak{S}_{2,4}),\ \phi'(-w_2w_1w_2\overline{\mathfrak{S}}_{2,4})\rangle\\ &+\langle M(w_1,w_2w_1w_2\mathfrak{S}_{2,4})N(w_2,w_1w_2\mathfrak{S}_{2,4})M(w_1,w_2\mathfrak{S}_{2,4})N(w_2,\mathfrak{S}_{2,4})\phi(\mathfrak{S}_{2,4}),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \phi'(-w_-\overline{\mathfrak{S}}_{2,4})\rangle\Big].\end{aligned}$$

但し (3.9) で $\mathfrak{S}_{2,4}\neq\mathfrak{S}_{2,3}$.

(2) $P=P_1$ のとき.

$$\langle\theta_\phi,\theta_{\phi'}\rangle_{L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=0}A(\phi,\phi')(\pi)\,d\pi$$

(3.10)
$$+c_1\langle N(w(P_1),\mathfrak{S}(P_1))\phi(\mathfrak{S}(P_1)),\ \phi'(-w(P_1)\overline{\mathfrak{S}(P_1)})\rangle.$$

(3) $P=P_2$ のとき.

$$\langle\theta_\phi,\theta_{\phi'}\rangle_{L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\pi\in\mathfrak{P},\mathrm{Re}\pi=0}A(\phi,\phi')(\pi)\,d\pi$$

(3.11)
$$+c_2\langle N(w(P_2),\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k}))\phi(\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k})),\ \phi'(-w(P_2)\overline{\mathfrak{S}(P_2,\eta_{k'/k})})\rangle$$

(3.12)
$$+c_2'\langle N(w(P_2),\mathfrak{S}(P_2,\mathbf{1}))\phi(\mathfrak{S}(P_2,\mathbf{1})),\ \phi'(-w(P_2)\overline{\mathfrak{S}(P_2,\mathbf{1})})\rangle$$

3.2 留数スペクトルの決定

定理 3.2 の内積公式の各項のうち, 離散的な内積を表す (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) それに (3.12) が留数スペクトルの内積を与えている. 従ってそれらの項の中の intertwining 作用素たちの像が留数スペクトルを与える.

(3.9), (3.10), (3.11) それに (3.12) については, intertwining 作用素を各素点での局所的な intertwining 作用素の tensor 積に分解し Langlands 分類を適用することにより, 像そのものが既約であることがわかる. これらは定理 2.1 の *(3)*, *(4)* それに *(5)* の寄与を与えている.

項 (3.7) と (3.8) については, ある $\mathbb{A}_{k'}^\times/k'^\times$ の指標 χ of $\mathbb{A}_{k'}^\times/k'^\times$ を使って

$$\mathfrak{S}_{1,2}=\chi|\ |_{\mathbb{A}_{k'}}^{3/2}\otimes\chi|\ |_{\mathbb{A}_{k'}}^{1/2},\ (\chi|_{\mathbb{A}^\times}=\mathbf{1}),\quad \mathfrak{S}_{1,3}=\chi|\ |_{\mathbb{A}_{k'}}\otimes\chi,\ (\chi|_{\mathbb{A}^\times}=\eta_{k'/k})$$

と書けることに注意する. また $w_-=(w_2w_1w_2)w_1$ と

$$\mathrm{Im}N(w_1,\mathfrak{S}_{1,2})=\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[(\chi\circ\det)|\det|_{\mathbb{A}_{k'}}\otimes\mathbf{1}_{U_1(\mathbb{A})}],$$
$$\mathrm{Im}N(w_1,\mathfrak{S}_{1,3})=\mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[(\chi\circ\det)|\det|_{\mathbb{A}_{k'}}^{1/2}\otimes\mathbf{1}_{U_1(\mathbb{A})}]$$

から, 決定すべきは P_1 からの退化主系列表現上の intertwining 作用素の像の既約分解である. 対応する各素点 v での局所成分の既約分解は [K-S] 及び [Le], [Le-Z] で決定されている. これからまず $\mathrm{Im}N(w_-, \mathfrak{S}_{1,2})$ が定理 2.1 の *(1)* の既約表現たちからなっていることがわかる.

次に $\mathrm{Im}N(w_1, \mathfrak{S}_{1,3})$ を考える. 局所成分 $\mathrm{Im}N(w_1, (\mathfrak{S}_{1,3})_v)$ の既約成分は $k' \otimes_k k_v$ 上の 1 次元の Hermite 形式付き空間 V_v の unitary 群 $U(V_v)$ の単位表現からの θ-lift たち $R(V_v, \chi_v)$ である. このような Hermite 形式付き空間の coherent な族 $V_{\mathbb{A}} = \{V_v\}_v$ に対して $G(\mathbb{A})$ の既約で smooth な表現 $R(V_{\mathbb{A}}, \chi) := \bigotimes_v R(V_v, \chi_v)$ が得られる. この $R(V_{\mathbb{A}}, \chi)$ を扱うには generalized Whittaker model を使う (cf. [K-R-S] §2).

$U_1(\mathbb{A})/U_1(k)$ の指標はある k'- 係数の Hermite 行列 β を使って

$$\psi_\beta : U_1(\mathbb{A}) \ni u(B) \longrightarrow \psi(\mathrm{tr}(B\beta)) \in \mathbb{C}^1,$$

と書ける. 我々の目的には $\det\beta \neq 0$ となる ψ_β のみを考えれば十分である. このとき既約で smooth な $G(\mathbb{A})$ の表現 (π, V_π) の generalized Whittaker functional の空間を

$$\mathcal{W}_\beta(\pi) := \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{L} : V_\pi \to \mathbb{C} \\ \text{線形写像} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{(i) } \mathfrak{L}(\pi(u)f) = \psi_\beta(u)\mathfrak{L}(f),\ \forall u \in U_1(\mathbb{A}_f) \\ \text{(ii) } \mathfrak{L}(d\pi(X)f) = d\psi_\beta(X)\mathfrak{L}(f),\ \forall X \in \mathrm{Lie}U_1(\mathbb{A}_\infty) \end{array} \right\}$$

と定義する. (π, V_π) が保型表現の場合には各 $f \in V_\pi$ に対してその β-th Fourier 係数が

$$W_\beta(f)(g) := \int_{U_1(k)\backslash U_1(\mathbb{A})} f(ug)\overline{\psi_\beta(u)}\, du$$

で定義され, 特に Whittaker functional $W_\beta \in \mathcal{W}_\beta(\pi)$ が $V_\pi \ni f \to W_\beta(f)(1) \in \mathbb{C}$ によって与えられることに注意する. このとき重要な事実は

> $R(V_{\mathbb{A}}, \chi)$ から $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ への intertwining map D がすべての可逆な k'-係数の Hermite 行列 β に対して $W_\beta \circ D = 0$ を満たせば $D = 0$.

これからまず, $R(V_{\mathbb{A}}, \chi)$ の留数スペクトルでの重複度が高々 1 であることがわかる (intertwining map の空間が 1 次元であることを示す). さらに Weil 表現の具体的な式と組み合わせれば $V_{\mathbb{A}}$ が k' 上の Hermite 空間から来ていないときには $R(V_{\mathbb{A}}, \chi)$ は L^2- 保型形式の空間に寄与しないこともわかる. 最後に $V_{\mathbb{A}}$ が k' 上の Hermite 空間から来ている場合に $R(V_{\mathbb{A}}, \chi)$ が実際に留数スペクトルに現れることは, θ- 積分を使って intertwining map を作って証明する.

References

[G-PS] S. Gelbert and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Automorphic forms and L-functions for the unitary group*, in Lie Group Representations II, LNM 1041, Springer-Verlag, 1984, pp. 141–184.

[H-L-R] G. Harder, R. P. Langlands and M. Rapoport, *Algebraische Zyklen auf Hilbert-Brumenthal-Flächen*, J. reine angew. Math. 366 (1986), pp. 53–120.

[J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic Forms on $GL(2)$, LNM 114, Springer (1970).

[Ki] H. Kim, *The residual spectrum of* Sp_4, to appear in Comp. Math.

[Ko1] T. Kon-no, *The residual spectrum of* $U(2,2)$, thesis.

[Ko2] ———, *The residual spectrum of* $Sp(2)$, preprint.

[K-R-S] S. S. Kudla, S. Rallis and D. Soudry, *On the degree 5 L-function for* $Sp(2)$, Invent. math. 107 (1992), pp. 483–541.

[K-S] S. S. Kudla and W. J. Sweet, Jr., *Degenerate principal series representations for* $U(n,n)$, preprint.

[La] R. P. Langlands, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series, LNM 544, Springer.

[L-L] J-P. Labesse and R. P. Langlands, *L-indistinguishability for* $SL(2)$, Can. J. Math. 31 (1979), pp. 726–785.

[Le] Soo Teck Lee, *On some degenerate principal series representations of* $U(n,n)$, J. Funct. Anal. 126 (1994), pp. 305–366.

[Le-Z] ——— and Chen-bo Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence*, preprint, National Univ. of Singapore.

[Sh1] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; Complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. 132 (1990), pp. 273–330.